

TRUDI

COSTANTI ARBITRARIE

LE

v.

nea

VITTORIO EM. II

Universitätsbibliothek Bonn



1000 1-6-4-25

SULLA DETERMINAZIONE
DELLE COSTANTI ARBITRARIE

che completano

GLI INTEGRALI DELL'EQUAZIONI LINEARI

così differenziali, che a differenze finite

con una nota relativa al sesto della memoria.

PER

N. TRUDI



Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli
Fascicolo 6.^o — Giugno 1864.

Stamperia del Fibreno 1864

SULLA DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE CHE COMPLETANO
GLI INTEGRALI DELL'EQUAZIONI LINEARI, COSÌ DIFFERENZIALI, CHE A
DIFFERENZE FINITE.

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO N. TRUDI.

letta nella tornata del dì 7 giugno 1864.

Sunto fatto dall'Autore.

Si sa che la risoluzione di quistioni importanti dipende da una opportuna determinazione delle costanti arbitrarie, le quali completano gli integrali delle equazioni differenziali lineari. Supposta un'equazione di tal natura dell'ordine n^{ma} , la determinazione di quelle costanti vuole essere, di ordinario, regolata in guisa che, per un particolare valore assegnato della variabile, la funzione e le sue successive $n-1$ derivate prendano valori anche assegnati; ed è nota la bellissima soluzione di questa quistione data dell'illustre Lagrange; soluzione da cui risulta che i valori delle costanti, i quali soddisfano alle condizioni preseritte, si hanno ne' numeratori delle frazioni parziali in cui può decomporci una certa funzione fratta razionale, che ha per denominatore il primo membro della equazione algebrica di grado n da cui dipendono gli integrali particolari su' quali è fondata la integrazione completa. Ma si sa del pari che questa soluzione è limitata esclusivamente al caso in cui le radici della detta equazione sono tra loro tutte disuguali; nè sembra che si abbia finora una soluzione più generale della quistione: che anzi il caso delle radici uguali vedesi espressamente messo da banda da tutti coloro che si occupano di siffatto argomento (*).

(*) V. Duhamel, *Éléments du Calcul infinitésimal* v. 2^a—n° 137—Sturm, *Cours d'Analyse*—v. 2^a, n.° 524.

Dobbiamo tuttavolta osservare che lo stesso Lagrange ha esteso la sua soluzione anche al caso delle radici uguali; ma obbligati per talune ricerche ad applicar le formole date a quest'uopo da quel gran geometra, disaccordi visibili ne' risultamenti del calcolo ci fecero concepire il sospetto che potessero non essere esatte; e tali in fatti esse sono, dappoi ch  essendoci rivolti a cercare la deduzione di quella formole, che Lagrange si limita soltanto ad accennare, senza darne dimostrazione, ci trovammo condotti ad una soluzione diversa, ma interamente uniforme a quella data dal medesimo geometra pel caso delle radici disuguali.

Aggiungiamo che una quistione del tutto analoga a quella, della quale   parola, si ritrova nella teoria delle equazioni lineari a differenze finite; ed   propriamente a riguardo di queste ultime equazioni che fu data da Lagrange la risoluzione della quistione di cui si tratta (*).

Ignorando se fossero gi  fatte da altri le osservazioni che presentiamo intorno a queste ricerche di Lagrange non abbiamo ommesso di assicurarcene per ogni via; ma le nostre pi  diligenti indagini furono per buona pezza infruttuose. Per , non ha guari, volendo riscontrare una memoria del Paoli, tanto conosciuta da' geometri, relativa alle equazioni a differenze finite a 'parziali ed alla partizione de' numeri, che trovasi nel secondo volume delle memorie della Societ  Italiana, ci venne a caso sott'occhio nel seguente volume terzo una memoria del Malfatti dal titolo — *Delle serie ricorrenti* — e non fu lieve la nostra sorpresa scorgendo che in essa quel distinto geometra Italiano comincia appunto dallo esaminare le formole gi  dette di Lagrange, e le riconosce inesatte. N  solo egli mette in vista il difetto, ma si   studiato a correggerlo ed a dare le formole convenienti per la risoluzione della quistione. Ora un lavoro cos  interessante del Malfatti sembra interamente ignorato da' geometri; ed   inconcepibile come ci  potesse verificarsi; tanto pi  che questa memoria, di presso a cento pagine,   quasi una continuazione di quella del Paoli, ed ha per oggetto principale i medesimi problemi sulla partizione dei numeri del Paoli considerati. E non   dubbio che il Malfatti in queste ricerche sia andato pi  innanzi dello stesso Paoli, sembrandoci di essersi di molto avvicinato ai risultamenti ottenuti in questi ultimi tempi dai due chiari geometri Inglesi Cayley e Sylvester.

Se fosse lecito di pronunciare un motivo che abbia potuto influire a tener nell'oblio questo lavoro dottissimo del Malfatti, noi dovremmo

(*) *Memoire de l'Academie de Berlin*, anno 1775, p. 185

unicamente trovarlo nella esposizione alquanto pesante delle sue ricerche, le quali per una parte fondano sopra induzioni, anzichè sopra dimostrazioni generali, essendo guidate dallo esame di molti casi particolari, il che impegna a calcoli prolissi, cui non è così agevole di seguire attentamente; e per altra parte sopra una specie particolare di algoritmo di derivazione, da lui espressamente immaginato. Ma tutto ciò nulla toglie alla importanza delle sue deduzioni.

Ecco ora un sunto rapidissimo del risultamento de' nostri studii.

Data l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$(1) \quad P_0 \frac{d^x y}{dx^x} + P_1 \frac{d^{x-1} y}{dx^{x-1}} + \dots + P_{x-1} \frac{dy}{dx} + P_x y = 0,$$

si sa che il suo integrale completo dipende dalle radici dell'equazione

$$f(z) = P_0 z^x + P_1 z^{x-1} + \dots + P_x = 0.$$

Sia α una delle radici; se è semplice, la medesima darà all'integrale un termine della forma

$$A e^{(\alpha - \omega)x},$$

dove A figura una costante arbitraria, ed ω un particolare valore qualunque di x . Ma se la radice è multipla di grado α , la medesima introdurrà nell'integrale una espressione funzione di x , di α , e di α costanti arbitrarie, che per compendio indichiamo con X_α , ma che è definita come segue:

$$(2) \quad X_\alpha = \left(A_\alpha \frac{(x-\alpha)^{\alpha-1}}{1 \cdot 2 \dots (\alpha-1)} + A_{\alpha-1} \frac{(x-\alpha)^{\alpha-2}}{1 \cdot 2 \dots (\alpha-2)} + \dots + A_{\alpha-\alpha+1} (x-\alpha) + A_{\alpha-\alpha} \right) e^{(\alpha - \omega)x}.$$

denotando $A_\alpha, A_{\alpha-1}, \dots, A_{\alpha-\alpha+1}$ le α costanti arbitrarie. Quando $\alpha=1$, questa espressione si riduce ad

$$X_1 = A_\alpha e^{(\alpha - \omega)x},$$

e si ritorna al caso delle radici semplici.

Se si tratta di un'altra radice, β per esempio, che sia multipla di grado β , scriveremo uniformemente X_β per denotare la funzione di x , di β , e di β costanti formata nello stesso modo della precedente; ed allora bisogna ritenere che queste β costanti siano rappresentate con la lettera

maiuscola dello stesso nome della radice, variata con gl' indici, e per conseguenza con $B_0, B_1, \dots, B_{p-1}$.

Ciò premesso, chiamando $a, b, \dots, l$ le radici dell'equazione $f(z)=0$, per considerare il caso più generale, ammetteremo che siano multiple rispettivamente di gradi $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, a patto che si abbia $\alpha + \beta + \dots + \lambda = n$; ed allora, conformemente alle notazioni convenute, l'integrale generale dell'equazione (1) sarà

$$(3) \quad y = X_0 + X_1 + \dots + X_{p-1}$$

perciocchè il secondo membro contiene il sistema di n costanti arbitrarie:

$$A_0, A_1, \dots, A_{n-1}; B_0, B_1, \dots, B_{p-1}; \dots; L_0, L_1, \dots, L_{n-1}.$$

Ora nelle applicazioni son queste costanti che di ordinario vogliono determinarsi in guisa che per un dato valore x di x la funzione y e le sue successive $n-1$ derivate prendano valori anche dati; di modo che se questi dati valori si dinotino rispettivamente con $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, debba essere in generale

$$D_x^r(y)_{x=a} = y_r.$$

Per risolvere questa quistione cominceremo dal prendere la derivata r^{ma} dell'equazione (3); e fattovi $x=a$ si avrà dapprima

$$(4) \quad y_r = D_x^r(X_0 + X_1 + \dots + X_{p-1})_{x=a}.$$

Da un'altra parte considerando le derivate i^{me} de' due fattori della funzione X_0 , secondochè è definita nella formola (2), si vedrà subito che i loro valori per $x=a$ equivalgono rispettivamente ad

$$A_{n-i-i} \quad \text{ed} \quad a^i;$$

e quindi tenendo presente il notissimo teorema di Leibnitz relativo alle derivate di ordine superiore del prodotto di due funzioni, otterremo senza difficoltà

$$D_x^r(X_0)_{x=a} = \frac{r(r-1)\dots(r-a+2)}{1.2\dots(a-1)} a^{r-(a-1)} A_0 + \frac{r(r-1)\dots(r-a+3)}{1.2\dots(a-2)} a^{r-(a-2)} A_1 + \dots + r a^{r-1} A_{n-1} + a^r A_{n-1}.$$

Essendo necessario di rappresentare di una maniera concisa il secondo

cercati delle costanti; di modo che essendo, per l'ipotesi fatta a riguardo delle radici dell'equazione $f(z) \equiv 0$,

$$f(z) = (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} \dots (x-l)^{\lambda},$$

si avrà

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{f(z)} &= \frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ &+ \frac{B_0}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ \frac{L_0}{(x-l)^{\lambda}} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}. \end{aligned}$$

Se si ponga

$$\frac{f(z)}{(x-a)^{\alpha}} = v_1(z), \quad \frac{f(z)}{(x-b)^{\beta}} = v_2(z), \quad \dots, \quad \frac{f(z)}{(x-l)^{\lambda}} = v_{\lambda}(z),$$

conformemente alla teoria della decomposizione delle frazioni i valori delle costanti saranno, in generale, definiti dalle formole

$$(8) \quad A_0 = \frac{D' \left(\frac{f(z)}{v_1(z)} \right)_{x=a}}{1.2.3 \dots \alpha}, \quad B_0 = \frac{D' \left(\frac{f(z)}{v_2(z)} \right)_{x=b}}{1.2.3 \dots \beta}, \quad \dots, \quad L_0 = \frac{D' \left(\frac{f(z)}{v_{\lambda}(z)} \right)_{x=l}}{1.2.3 \dots \lambda};$$

e così restano determinati i valori che bisogna attribuire alle costanti nell'integrale completo della proposta equazione differenziale affinché la funzione y o le sue successive $n-1$ derivate possano prendere i valori assegnati $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$.

Quando le radici dell'equazione $f(z) \equiv 0$ sono tra loro tutte disuguali, l'integrale completo della equazione (1), il quale pel caso generale è rappresentato dall'equazione (3), in questo caso particolare si riduce alla formola molto più semplice

$$y = A_0 e^{(a-x)} + B_0 e^{(b-x)} + \dots + L_0 e^{(l-x)},$$

dalla quale, per determinare le costanti secondo le condizioni prescritte, si deduce immediatamente il conosciuto sistema di equazioni

$$\begin{aligned} y_0 &= A_0 a^0 + B_0 b^0 + \dots + L_0 l^0 \\ y_1 &= A_0 a^1 + B_0 b^1 + \dots + L_0 l^1 \\ y_2 &= A_0 a^2 + B_0 b^2 + \dots + L_0 l^2 \\ &\dots \dots \dots \\ y_{n-1} &= A_0 a^{n-1} + B_0 b^{n-1} + \dots + L_0 l^{n-1}; \end{aligned}$$

e si sa che la risoluzione di questo sistema data da Lagrange è intera-

mente uniforme a quella da noi data pel caso generale. Così, qualunque sia la natura delle radici, il problema va sempre risoluto nella stessa maniera; e la soluzione di quel gran geometra pel caso particolare delle radici disuguali vedesi ora esattamente applicabile anche al caso dello radici uguali.

I limiti, tra' quali dobbiamo contenerci per la natura del rendiconto Accademico, non permettono di sviluppare in questo sunto la dimostrazione de' risultamenti accennati, che però rimandiamo alla pubblicazione della memoria completa: Ma non possiamo dispensarci dal far notare che le ricerche di Lagrange intorno a questa determinazione di costanti non si rapportano già agl' integrali delle equazioni differenziali, ma a quelli delle equazioni lineari a differenze finite; e quantunque questi due casi conducano a' medesimi risultamenti, pure essi sono ben diversi, in quanto che nel primo è stata necessaria una ricerca per fissare la forma delle equazioni (7), da cui dipende la risoluzione della quistione; mentre nel secondo si ritrovano ancora queste equazioni, ma come immediata conseguenza dello stesso integrale completo. In fatti, supposta l' equazione lineare a differenze finite dell' ordine n^{mo}

$$(9) \quad p_0 y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + \dots + p_{n-1} y_{x+1} + p_n y_x = 0,$$

dove x figura la variabile, e $p_0, p_1, \dots, p_n$, quantità costanti, è noto che il suo integrale completo dipende ancora dalle radici dell' equazione

$$f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n = 0.$$

Ora, supposto che a sia una delle radici si sa che, se questa radice è semplice la medesima darà all' integrale un termine della forma Aa^x , dinotando A una costante; ma se la radice è multipla di grado α , essa allora introdurrà nell' integrale la seguente espressione

$$A_0 \frac{r(r-1) \dots (r-\alpha+2)}{1 \cdot 2 \dots (\alpha-1)} a^{x-(\alpha-1)} + A_1 \frac{r(r-1) \dots (r-\alpha+1)}{1 \cdot 2 \dots (\alpha-2)} a^{x-(\alpha-2)} + \dots + A_{\alpha-2} a^{x-1} + A_{\alpha-1} a^x,$$

dove $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha-1}$ figurano α costanti arbitrarie. Ora questa espressione non è altra cosa che la stessa funzione dinotata poc' anzi con V_{α} ; e quindi ammettendo che le radici $a, b, \dots, f$ dell' equazione $f(z)=0$ sia-

due multiple rispettivamente di gradi $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, l'integrale completo della data equazione (9) sarà

$$(10) \quad y = V_{\alpha, \beta} + V_{\gamma, \delta} + \dots + V_{\lambda, \mu},$$

coincidendo così esattamente con la formola (6).

Posto cioè l'equazione (9), considerata come esprimente la natura di una serie, della quale un termine qualunque y_n dipende dagli n termini che lo precedono, suppone che ne siano dati i primi n termini $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, e siccome l'espressione di y_n , data dall'integrale (10), ne è il termine generale, risulta che le costanti debbono determinarsi in guisa che questo termine generale possa riprodurre i suddetti primi n termini della serie, ponendovi successivamente $r=0, 1, 2, \dots, n-1$; e quindi si ritorna al sistema delle equazioni (7), delle quali è già nota la soluzione. Così una è la soluzione della questione della determinazione delle costanti negli integrali delle equazioni lineari, così differenziali che a differenze finite; ed i loro valori si hanno sempre ne' numeratori delle frazioni parziali in cui può decomporre la funzione fratta razionale $\frac{f(z)}{f'(z)}$, la quale ne' due casi è formata de' medesimi elementi.

NOTA RELATIVA AL SENTO DELLA MEMORIA

DEL SOCIO TRUDI

Comunicata posteriormente dall'Autore.

Il pensiero che le osservazioni di Malfatti avessero dovuto ben giungere a cognizione di Lagrange, ci ha spinto durante la stampa della presente pubblicazione ad esaminare diligentemente i volumi delle memorie dall'Accademia di Berlino, posteriori a quello del 1775; e mal non ci apponemmo: chè nel volume pel 1792 abbiamo effettivamente rinvenuto una nota che si rapporta all'argomento del quale è parola, e che ha per titolo: *Recherches sur plusieurs points d'analyse relatifs à différents endroits des mémoires précédents—Sur l'expression du terme général des séries récurrentes, lorsque l'équation génératrice a des racines égales* — In questa nota Lagrange dichiara la cagione della inesattezza incorsa nelle antiche sue formole, facendo vedere essere ciò dipeso dall'aver Egli riguardato indipendenti quantità variabili che nol sono, e mostra come la soluzione debba rettificarsi.

Importa però di osservare che in queste ricerche posteriori è essenzialmente modificata la soluzione primiera di Lagrange; imperciocchè la nuova non è più, come la prima, esplicitamente diretta alla determinazione delle costanti, che completano l'integrale di un'equazione lineare a differenze finite, a condizione che debba risultarne il termine generale di una data serie ricorrente, ma è diretta invece ad ottenere la stessa espressione del termine generale; da che deriva che la novella soluzione non è più applicabile alla quistione analoga relativa all' inte-

..

grale completo dello equazioni lineari differenziali. D'altra parte essa è tutto perchè pruova di essergli interamente sfuggito il teorema che forma il soggetto delle nostre ricerche, e dal quale risulta la generalità della sua prima soluzione.

La scoperta intanto di questa nota di Lagrange esigeva che si fosse modificato il cenno storico premesso al sunto della nostra Memoria; ma essa ebbe luogo troppo tardi perchè ci fosse permesso di rettificarlo, sia perchè già stampato, sia perchè così letto all' Accademia; ma più di tutto perchè un estratto di questo cenno era già reso di pubblica ragione nel giornale di Napoli, dove suol pubblicarsi la notizia dei lavori accademici.

Ma quella nota, che pure sembra ignorata dai geometri, offre una particolarità memorabile intorno alla vita scientifica del Grande Analista. Il quale in quel rinecontro sembrò come punto che un altro avesse dovuto prevenirlo nel porre in rilievo la inaspettata delle antiche sue formule. E di fatti la nota suddetta conchiude con un' altra bellissima soluzione della stessa quistione; ma, cosa singolare per Lagrange, mentre Egli non fa che annunciare la nuova soluzione, senza darne alcuna pruova, come avea fatto nelle prime ricerche, questa volta invita formalmente i geometri a dimostrarla, il che non era certamente nelle sue abitudini. Ma crediamo questo tratto troppo importante per non doverci dispensare dal riportare qui testualmente le sue proprie parole... « Ces
« formules sont un peu différentes de celles que j'avois données sans dé-
« monstration dans le mémoire cité pour le cas de l'égalité des racines.
« Je m'étois aperçu de leur inexactitude après l'impression du mé-
« moire, mais entraîné par d'autres objets, j'avois toujours différé à re-
« venir sur celui-ci que je regardois comme moins important; et j'ai été
« prévenu à cet égard par un membre de la Société Italienne, Jean Fran-
« çois Malfatti, qui a donné sur ce sujet un savant mémoire dans le
« troisième tome du recueil de cette Société. Comme l'analyse de cet'au-
« leur est fort longue et conduit à des résultats un peu compliqués, j'ai
« cru devoir chercher à résoudre cette question d'une manière plus di-
« recte et plus conforme à la simplicité de la méthode générale exposée
« dans mon mémoire de 1775; c'est ce qui a occasioné les recherches
« précédentes; mais quoique les formules auxquelles je suis parvenu
« ne paroissent rien laisser à désirer pour la simplicité et la généralité,
« néanmoins, comme ces formules sont différentes pour les différentes

« cas de l'égalité de deux racines, de trois, de quatre, etc., on pour-
 roit désirer eneor une formule qui renfermât tous les cas; et voici celle
 « que j'ai trouvée, et que je présente aux géomètres, *en les invitant à*
 « *la démontrer directement* ».

Questa soluzione intanto, espressa con le notazioni adottate nell' ar-
 ticolo precedente, può ridursi a ciò che segue— Sia la serie ricorrente
 $y_0, y_1, y_2, \dots$ definita dall'equazione (9) del detto articolo, a una radice
 qualunque dell'equazione

$$f(z)p_0z^n + p_1z^{n-1} + \dots + p_n = 0 :$$

$\frac{1}{z}(z)$ la stessa funzione ivi considerata, e pongasi

$$\frac{1}{z}(a) \alpha' = F(a) .$$

Allora tutta la parte, che quella radice può introdurre nella espressione
 del termine generale della serie, consisterà nel termine che risulta in-
 dipendente da a nello sviluppo della seguente frazione :

$$\frac{F(a) + \frac{1}{1.2} F'(a) + \frac{1}{1.2.3} F''(a) + \dots}{f'(a) + \frac{1}{1.2} f''(a) + \frac{1}{1.2.3} f'''(a) + \dots} ;$$

osservando che nel denominatore di questa frazione si avrà $f'(a)=0$, se
 la radice a è doppia; se tripla sarà pure $f''(a)=0$; se quadrupla, sarà
 ancora $f'''(a)=0$; e così di seguito.

•
 —



680203



